数理解析研究所講究録
第 1872 巻 2014 年 176-182

有限群の p 部分群と斜準同型写像について
On p-subgroups and crossed homomorphisms of finite groups

淺井 恒信 (近畿大学)
Tsunenobu Asai (Kinki University)
庭崎 隆 (愛媛大学)
Takashi Niwasaki (Ehime University)

本講演の内容は, 竹ヶ原裕元氏 (室蘭工業大学), 千吉良直紀氏 (熊本大学) との共同研究に基づくものである。

1 予想, 及び関連する命題

有限群 A は有限群 G に群の自己同型として作用しているとする。写像 $\lambda : A \to G$ が斜準同型写像であるとは

$$\lambda(ab) = \lambda(a) \cdot {}^{a}(\lambda(b)), \quad a, b \in A$$

を満たすときにいう。これは

$$\widetilde{\lambda} : A \to G \rtimes A, \quad a \mapsto \lambda(a)a$$

が群の準同型写像となることと同値である。ここで, $G \rtimes A$ は G と A の半直積群を表す。

A から G への斜準同型写像全体のなす集合を $Z^1(A, G)$ で表す。また, A の交換子群を A' と書く。斜準同型写像の個数 $|Z^1(A, G)|$ に関して, 次の合同式が成り立つことが予想されている。

予想 1 ([5]). $|Z^1(A, G)| \equiv 0 \mod \gcd(|A/A'|, |G|)$

この予想は, 幾つかの特別な場合に成り立つことが確かめられている ([2], [3], [4], [5], [6], [8] 等)。本稿の内容に特に関わるのは, 次の場合である。これらにおいて, 有限群 G 及びその上の作用は任意でよい。

- A が巡回群の場合 (Frobenius の定理, Hall の定理)。
- $A = C \times E$ で, C は巡回 p 群, E は初等可換 p 群の場合。ここで p は素数。

さて, 予想 1 における交換子群を, A の一般の正規部分群 A_1 に置き換えて, 合同式

$$|Z^1(A, G)| \equiv 0 \mod \gcd(|A/A_1|, |G|)$$

が成り立つ条件を考察し, 次の結果を得たことを第 28 回代数的組合せ論シンポジウムで報告した ([1])。ここで, 自然数 n に対し, n_p は n を割る最大の p 巾 (即ち p-part) を表す。

定理 2. A_1 を A の正規部分群とする。$|A/A_1|$ を割る任意の素数 p に対して, $A_1 \leq B \trianglelefteq A$ で $|A/B| = |A/A_1|_p$ となる B が存在して, 任意の $\lambda \in Z^1(A,G)$, 及び $C_G(\widetilde{\lambda}(B))$ の $\widetilde{\lambda}(A/B)$ 不変な任意の p 部分群 K に対して,

$$|Z^1_\lambda(A/B,K)| \equiv 0 \mod \gcd(|A/B|,|K|)$$

が成り立つとする。このとき

$$|Z^1(A,G)| \equiv 0 \mod \gcd(|A/A_1|,|G|)$$

が成り立つ。

なお, 全ての素数 p について上記の部分群 B が存在することは, A/A_1 が巾零群であることと同値であることに注意する。

定理 2 を用いることにより, 以下のことが証明できる (または同様の議論が証明に使われた)。

定理 3. 全ての素数 p と, アーベル p 群 A, 及び一般の有限群 G に対し,

$$|Z^1(A,G)| \equiv 0 \mod \gcd(|A|,|G|_p)$$

が成り立つならば, 予想 1 は正しい。

定理 4 ([5])**.** 一般の有限群 A, G に対して,

$$|Z^1(A,G)| \equiv 0 \mod \gcd(|A/A' : \Phi(A/A')|,|G|)$$

が成り立つ。ここで, $\Phi(A/A')$ は A/A' のフラッチニ部分群である。

命題 5. A の正規部分群 B と, A/B が作用する G の任意の部分群 H に対し,

$$|Z^1(A/B,H)| \equiv 0 \mod \gcd(|A/B|,|H|)$$

が成り立つならば,

$$|Z^1(A,G)| \equiv 0 \mod \gcd(|A/B|,|G|)$$

が成り立つ。

命題 6. K を G の部分群とし, K_A を K の A 不変な最大の部分群とする。このとき, もし

$$|Z^1(A,K_A)| \equiv 0 \mod \gcd(|A|,|K_A|)$$

が成り立つならば,

$$|Z^1(A,G)| \equiv 0 \mod \gcd(|A|,|K|)$$

が成り立つ。

2　例外 p 群の自己準同型写像の個数

定理 2 における仮定部の合同式は, 一般には成り立たない。本節では, 例外 p 群 P に対して, $|\mathrm{Hom}(P,P)|_p = |P/P'|$ であることを計算により確かめる。ここで, 例外 p 群とは, $p=2$ のときは巡回群, 二面体群, 一般四元数群, 準二面体群のいずれか, p が奇素数のときは巡回群となる p 群を指す。

まず一般に, 有限群 P の, P 自身への自明な作用を考える。このとき, $Z^1(P,P) = \mathrm{Hom}(P,P) = \mathrm{End}(P)$ は, P の自己準同型写像全体のなす集合 (モノイド) である。その位数 $|\mathrm{End}(P)|$ は, もし P の部分群 H 達を分類でき, その自己同型群の位数 $|\mathrm{Aut}(H)|$ がすべて分かるならば, 次の等式により計算することができる。

$$|\mathrm{End}(P)| = \sum_{N \trianglelefteq P} \sum_{\substack{H \leq P \\ H \simeq P/N}} |\mathrm{Aut}(H)| \tag{1}$$

例 7 (巡回群と初等可換 p 群). p を素数とし, C_n で位数 n の巡回群を表す。以下のアーベル群の例では, (1) 式を用いずとも $|\mathrm{End}(P)|$ が求まり, それが $|P| = |P/P'|$ で割り切れることが容易に確かめられるが, (1) 式が実際にどのような値を与えているかを示す。

1. $P = C_p$ のとき。

$$|\mathrm{End}(C_p)| = |\mathrm{Aut}(C_p)| + |\mathrm{Aut}(1)| = (p-1)+1 = p.$$

   $|\mathrm{Aut}(C_p)|$ と $|\mathrm{Aut}(1)|$ はいずれも p と互いに素で, 足し算を行って初めて p で割り切れること, しかし p で 1 度しか割り切れないことを注意しておく。

2. $P = C_{p^2}$ のとき。

$$|\mathrm{End}(C_{p^2})| = |\mathrm{Aut}(C_{p^2})| + |\mathrm{Aut}(C_p)| + |\mathrm{Aut}(1)| = (p^2-p)+(p-1)+1 = p^2.$$

3. $P = C_p \times C_p$ のとき。
   P は $\mathbb{Z}_p$ 上の 2 次元ベクトル空間であり, 1 次元部分空間 (つまり位数 p の部分群) は $\frac{p^2-1}{p-1} = p+1$ 個ある。$|\mathrm{Aut}(C_p \times C_p)| = |GL_2(p)| = (p^2-1)(p^2-p)$ であるから

$$\begin{aligned}|\mathrm{End}(C_p \times C_p)| &= |\mathrm{Aut}(C_p \times C_p)| + (p+1)\cdot(p+1)|\mathrm{Aut}(C_p)| + |\mathrm{Aut}(1)| \\ &= (p^2-1)(p^2-p) + (p+1)^2(p-1) + 1 = p^4.\end{aligned}$$

位数が同じ p^2 であっても, $P = C_{p^2}$ と $P = C_p \times C_p$ の $|\mathrm{End}(P)|$ は大きく異なっている。一般に, $|\mathrm{End}(C_{p^n})| = |C_{p^n}| = p^n$ であり, これは p^{n+1} では割り切れない。他方, $P = C_p \times \cdots \times C_p$ (n 個の直積) のとき, $|\mathrm{End}(P)| = |M_n(p)| = p^{n^2}$ である。

例 8 (二面体群). $n=2^m$, $m \geq 0$ として, 位数 $2n$ の二面体群

$$D_{2n}=\langle x,y \mid x^n=y^2=1,\ yxy=x^{-1}\rangle=\langle x\rangle \rtimes \langle y\rangle$$

を考える。$D_4=C_2\times C_2$ であり, $D_2=C_2$ である。また, $\mathrm{Aut}(D_{2n})$ は次の通りである。

$$\mathrm{Aut}(D_{2n})\simeq\begin{cases}1 & (n=1)\\ S_3 & (n=2)\\ \mathbb{Z}_n\rtimes U(\mathbb{Z}_n) & (n\geq 4)\end{cases}$$

ここで, S_3 は 3 次対称群で位数 6, また $U(\mathbb{Z}_n)$ は $\mathbb{Z}_n=\mathbb{Z}/(n)$ の単数群で, $|\mathbb{Z}_n\rtimes U(\mathbb{Z}_n)|=\frac{n^2}{2}=2^{2m-1}$ である ([2])。

$n=4$ のとき, $|\operatorname{End}(D_8)|$ は次のように計算できる。D_8 の位数 2 の部分群は 5 個あり, 中心 $Z(D_8)=\langle x^2\rangle$ だけが正規である。位数 4 (つまり指数 2) の 3 個の部分群はすべて正規で, $\langle x\rangle$ だけが巡回群である。従って

$$\begin{aligned}|\operatorname{End}(D_8)|&=|\mathrm{Aut}(D_8)|+1\cdot 2|\mathrm{Aut}(D_4)|+3(4+1)|\mathrm{Aut}(D_2)|+|\mathrm{Aut}(1)|\\&=8+1\cdot 2\cdot 6+3\cdot 5\cdot 1+1=36.\end{aligned}$$

$n\geq 8$ のときも同様に, 次のように計算できる。

$$\begin{aligned}|\operatorname{End}(D_{2n})|&=|\mathrm{Aut}(D_{2n})|+1\cdot 2|\mathrm{Aut}(D_n)|+1\cdot 4|\mathrm{Aut}(D_{n/2})|+\cdots\\&\qquad+1\cdot\frac{n}{4}|\mathrm{Aut}(D_8)|+1\cdot\frac{n}{2}|\mathrm{Aut}(D_4)|+3(n+1)|\mathrm{Aut}(D_2)|+|\mathrm{Aut}(1)|\\&=2^{2m-1}+1\cdot 2\cdot 2^{2m-3}+1\cdot 2^2\cdot 2^{2m-5}+\cdots\\&\qquad+1\cdot 2^{m-2}\cdot 2^3+1\cdot 2^{m-1}\cdot 6+3(2^m+1)\cdot 1+1\\&=(n+2)^2.\end{aligned}$$

なお, $n\geq 2$ のとき, D_{2n} の交換子群は $\langle x^2\rangle$ であり, $|D_{2n}:\langle x^2\rangle|=4$ である。一方, 上の計算結果より

$$|\operatorname{End}(D_{2n})|=n^2+4n+4\equiv 4 \pmod{2n}$$

であるから, この場合に予想 1 の合同式 (つまり, $|\operatorname{End}(D_{2n})|$ は 4 で割り切れる) は確かに成り立っているが, 8 では割り切れない。

例 9 (一般四元数群). $n=2^m$, $m\geq 2$ として, 位数 $2n$ の一般四元数群

$$Q_{2n}=\langle x,y \mid x^{n/2}=y^2,\ yxy=x^{-1}\rangle$$

を考える。$\mathrm{Aut}(Q_{2n})$ は次の通りである。

$$\mathrm{Aut}(Q_{2n})\simeq\begin{cases}S_4 & (n=4)\\ \mathbb{Z}_n\rtimes U(\mathbb{Z}_n) & (n\geq 8)\end{cases}$$

ここで, S_4 は 4 次対称群で位数 24 である。

$n=4$ のとき, $|\operatorname{End}(Q_8)|$ は次のように計算できる。Q_8 の位数 2 の部分群は中心 $Z(Q_8)=\langle x^2\rangle$ だけである。位数 4 の 3 個の部分群はすべて正規で, 巡回群である。従って

$$\begin{aligned}|\operatorname{End}(Q_8)| &= |\operatorname{Aut}(Q_8)|+3\cdot 1|\operatorname{Aut}(D_2)|+|\operatorname{Aut}(1)|\\ &= 24+3\cdot 1\cdot 1+1=28.\end{aligned}$$

$n\geq 8$ のときも同様に, 次のように計算できる (これは $n=4$ の場合を含まない)。

$$\begin{aligned}|\operatorname{End}(Q_{2n})| &= |\operatorname{Aut}(Q_{2n})|+3\cdot 1|\operatorname{Aut}(D_2)|+|\operatorname{Aut}(1)|\\ &= \frac{n^2}{2}+4.\end{aligned}$$

なお, Q_{2n} の交換子群は $\langle x^2\rangle$ であり, $|Q_{2n}:\langle x^2\rangle|=4$ である。一方, 上の計算結果より $|\operatorname{End}(Q_{2n})|\equiv 4 \pmod{2n}$ であるから, この場合にも予想 1 の合同式は成り立っているが, やはり 8 では割り切れない。

例 10 (準二面体群). $n=2^m$, $m\geq 3$ として, 位数 $2n$ の準二面体群

$$SD_{2n}=\left\langle x,y \;\middle|\; x^n=y^2=1,\ yxy=x^{-1+n/2}\right\rangle=\langle x\rangle\rtimes\langle y\rangle$$

を考える。$\operatorname{Aut}(SD_{2n})\simeq 2\mathbb{Z}_n\rtimes U(\mathbb{Z}_n)$ である。一方, SD_{2n} の正規部分群は次のいずれかである。

$$\langle x^j\rangle\simeq C_{n/j}\quad (\text{ただし } j|n),\qquad \langle x^2,y\rangle\simeq D_n,\qquad \langle x^2,xy\rangle\simeq Q_n,\qquad SD_{2n}$$

単位群を除いて, これらはすべて $\langle x^{n/2}\rangle$ を含み, また $SD_{2n}/\langle x^{n/2}\rangle\simeq D_n$ であるので, SD_{2n} の自明でない剰余群は D_n の剰余群, つまり二面体群である。従って, $|\operatorname{End}(SD_{2n})|$ は次のように計算できる。

$$\begin{aligned}|\operatorname{End}(SD_{2n})| &= |\operatorname{Aut}(SD_{2n})|+1\cdot 1|\operatorname{Aut}(D_n)|+1\cdot 2|\operatorname{Aut}(D_{n/2})|+\cdots\\ &\quad +1\cdot\frac{n}{8}|\operatorname{Aut}(D_8)|+1\cdot\frac{n}{4}|\operatorname{Aut}(D_4)|+3\left(\frac{n}{2}+1\right)|\operatorname{Aut}(D_2)|+|\operatorname{Aut}(1)|\\ &= 2^{2m-2}+1\cdot 1\cdot 2^{2m-3}+1\cdot 2\cdot 2^{2m-5}+\cdots\\ &\quad +1\cdot 2^{m-3}\cdot 2^3+1\cdot 2^{m-2}\cdot 6+3(2^{m-1}+1)\cdot 1+1\\ &= \frac{n^2}{2}+2n+4.\end{aligned}$$

なお, SD_{2n} の交換子群も $\langle x^2\rangle$ であり, $|SD_{2n}:\langle x^2\rangle|=4$ である。一方, 上の計算結果より $|\operatorname{End}(SD_{2n})|\equiv 4 \pmod{2n}$ であるから, この場合にも予想 1 の合同式は成り立っているが, やはり 8 では割り切れない。

3 例外 p 群の特徴づけ

本節では, P を非可換 2 群とする。次は Alperin-Feit-Thompson の定理である。

定理 11 ([9, (4.9)]). P の位数 2 の元の個数を t とおく。もし $t \equiv 1 \pmod 4$ ならば, $|P/P'| = 4$ である。

この定理の仮定は, $|\operatorname{Hom}(C_2, P)| \equiv 2 \pmod 4$ と同じである。予想 1 は, A が巡回群の場合には証明されているので, $|\operatorname{Hom}(C_2, P)|$ は必ず偶数である。従って, この定理の仮定は, $|\operatorname{Hom}(C_2, P)| \not\equiv 0 \pmod 4$ とも同じである。

次は Taussky の定理と呼ばれている。

定理 12 ([7, Theorem 5.4.5]). もし $|P/P'| = 4$ ならば, P は例外 2 群である。

これらから, $|\operatorname{Hom}(C_2, P)| \not\equiv 0 \pmod 4$ ならば, P は例外 2 群であることが分かる。また, この逆が成り立つことも容易に確かめることができる。

この命題は Murai-Takegahara により, 更に次のように拡張されている。

定理 13 ([10], [11]). ある自然数 r に対して, $|Z^1(C_{p^r}, P)| \not\equiv 0 \bmod \gcd(p^{r+1}, |P|)$ となるならば, P は例外 2 群である。

このような観点に立つと, 前節までの結果から, 次のバリエーションに辿り着く。

定理 14. 非可換 2 群 P に対し, P が例外 2 群であることと, $|\operatorname{End}(P)| \not\equiv 0 \pmod 8$ であることとは同値である。

証明. P が例外 2 群のとき, 主張が正しいことは前節で確かめた。逆に, P は例外 2 群でないと仮定する。Taussky の定理 (定理 12) より, $|P/P'| \geq 8$ である。P の正規部分群 B で, P/B が位数 8 の可換群となるものが存在する。このとき, P/B は C_8, $C_4 \times C_2$, $C_2 \times C_2 \times C_2$ のいずれかに同型であるが, これらの群については予想 1 が解決されており, $|Z^1(P/B, H)| \equiv 0 \bmod \gcd(|P/B|, |H|)$ が任意の有限群 H とその上への作用に対して成り立っている。よって, 命題 5 より

$$|\operatorname{End}(P)| = |\operatorname{Hom}(P, P)| \equiv 0 \mod \gcd(|P/B|, |P|) = 8$$

を得る。 □

なお, 講演時には「予想 1 が正しければ, 定理 14 が成り立つ」と紹介したが, 後日竹ヶ原氏から, 命題 5 を用いた上記の証明が指摘されたので, ここではそれを掲載させていただいた。

参考文献

[1] T. Asai and T. Niwasaki, 有限群の斜準同型に関する予想の拡張について, 第 28 回代数的組合せ論シンポジウム報告集 (2011).

[2] T. Asai, T. Niwasaki and Y. Takegahara, Crossed homomorphisms from rank 2 abelian to exceptional p-groups, *J. Algebra* **270** (2003) 212-—237.

[3] T. Asai and Y. Takegahara, On the number of crossed homomorphisms, *Hokkaido Math. J.* **28** (1999), 535–543.

[4] T. Asai and Y. Takegahara, $|\mathrm{Hom}(A, G)|$, IV, *J. Algebra* **246** (2001), 543–563.

[5] T. Asai and T. Yoshida, $|\mathrm{Hom}(A, G)|$, II, *J. Algebra* **160** (1993), 273–285.

[6] R. Brauer, On a theorem of Frobenius, *American Math. Monthly* **76** (1969), 12–15.

[7] D. Gorenstein, *Finite Groups, Chelsea Publishing Company, New York* (1980).

[8] P. Hall, On a theorem of Frobenius, *Proc. London Math. Soc.* (2) **40** (1935), 468–501.

[9] I. M. Isaacs, *Character theory of finite groups, Academic Press* (1976).

[10] M. Murai, On the number of p-subgroups of a finite group, *J. Math. Kyoto Univ.* **42** (2002) 161–174.

[11] M. Murai and Y. Takegahara, Hall's relations in finite groups, *J. Algebra* **271** (2004) 312–326.